IV

Zur Theorie

der

Capillarerscheinungen

W. Wolski.

1886

Die Capillarerscheinungen sind von den Physikern frühzeitig bemerkt worden, ihre Gesetze wurden studirt und ein Erklärungsgrund für dieselben gesucht. Man überzeugte sich durch Versuche, daß die Höhe, zu welcher eine Flüssigkeit im Capillarröhrchen sich erhebt oder sinkt, dem Durchmesser des Röhrchens umgekehrt proportional ist, die Erhebung zwischen zwei parallelen Platten umgekehrt proportional ihrem Abstande, aber nur halb so groß, wie in einem kreisrunden Röhrchen, dessen Durchmesser gleich ist dem Abstande der beiden Platten. Man bemerkte auch, daß in einem conischen Röhrchen oder zwischen zwei geneigten Platten ein Flüssigkeitstropfen, wenn er netzt, gegen die engere Stelle, wenn er nicht netzt, gegen die weitere sich zu bewegen strebt, etc. Diese und die anderen hieher gehörigen Erscheinungen erklärte man durch eine unmittelbare Einwirkung der festen Körper auf die Flüssigkeit, eine Anziehung, welche ähnlich wirken sollte, wie die Gravitation der Massen.

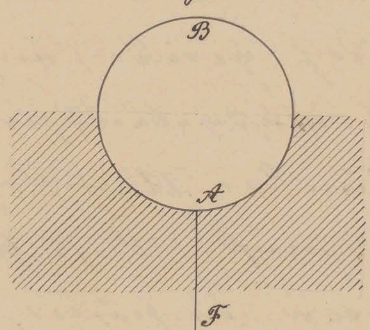
In diese mehr weniger unklaren Vorstellungen wurde erst zu Anfang dieses Jahrhunderts Licht gebracht, und zwar durch Laplace, welcher in seiner Schrift „Théorie de l'action capillaire" und in der ein Jahr darauf folgenden: „Supplément à la théorie de l'action capillaire" bewies, daß die Erscheinungen der Capillarität allerdings in letzter Linie von der gegenseitigen Anziehung zwischen den Theilchen des eingetauchten

Körper und den Flüssigkeitstheilchen herrschen, daß aber diese Anziehung nicht, wie man angenommen hat, direct, unmittelbar die Capillarerscheinungen veranlaßt und bestimmt. Vielmehr bedingt die Anziehung zwischen Flüssigkeit und Röhrenwand zunächst nur die Bildung einer concaven oder convexen Oberfläche und erst die Gestalt dieser ist für die Erscheinungen der Capillarität qualitativ und quantitativ maaßgebend. Laplace findet nämlich auf theoretischem Wege, dass, wenn die Flüssigkeit in eine Kugelfläche endigt, die Kraft, welche durch die Krümmung hervorgerufen wird, dem Kugelradius umgekehrt proportional ist; dass ferner, wenn die Oberfläche anders gestaltet ist, die oberwähnte Kraft proportional ist dem arithmetischen Mittel aus der grössten und der kleinsten Krümmung in dem betreffenden Puncte. Auf Grund dieses Resultates stellt Laplace für alle freien Oberflächen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, durch deren Integration man über die Gestalt der Fläche in besonderen Fällen Aufschluß erhält. Die Resultate dieser Rechnungen sind durch viele genaue Versuche geprüft worden und die Uebereinstimmung der Rechnung mit den Experimenten bestätigt die Richtigkeit des Laplace'schen Grundtheorems.

Was nun die Ableitung desselben anbelangt, so gründet sich diese auf geometrische Betrachtungen und wird über die Natur der zwischen den Flüssigkeitstheilchen wir-

kenden Kräfte die einzige Annahme gemacht, daß sie nur auf äußerst kleine Entfernungen bestehen und in merklichen Distanzen verschwinden. Unter dieser Voraussetzung untersucht Laplace die Wirkung einer Kugel AB

Fig. 1.



aus Flüssigkeit auf einen geradlinig und radial von A ins Unendliche verlaufenden Faden F von derselben Flüssigkeit und findet diese Wirkung $= K - \frac{H}{r}$, wobei K und H bestimmte Integralausdrücke und r den Radius der Kugel bedeutet. Dabei deutet die Rechnung darauf hin, daß K bedeutend größer ist, als H, indem das Differential des letzteren Ausdrucks gleich ist ~~mit~~ dem Differentiale des ersteren multiplicirt mit einem Factor, der für die ganze Ausdehnung des Integrals äußerst klein bleibt. Da nun ein von der Flüssigkeit allseitig umgebener Flüssigkeitsfaden sich im Gleichgewichte befindet, so, schließt Laplace, muß, wenn der Faden bis an die Oberfläche reicht, also die Kugel AB entfernt ist, der Faden mit einer Kraft $K - \frac{H}{r}$ in die Flüssigkeit hineingezogen werden. Daraus folgert Laplace einen Druck $= K - \frac{H}{r}$, der von jeder Flüssigkeitsoberfläche in das Innere derselben sich fortpflanzt, die Cohäsion bewirkt und die Flüssigkeit in Capillarröhrchen hinauftreibt, weil in denselben das r, also auch $K - \frac{H}{r}$ kleiner ist, als außerhalb derselben.

Gegen die Laplace'sche Ableitung erhob

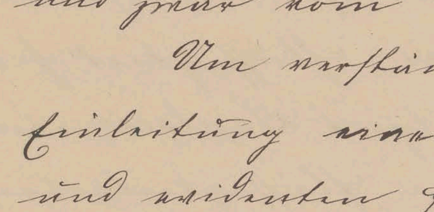
Poisson in seinem im Jahre 1831 erschienenen Werke: „Nouvelle théorie de l'action capillaire" Bedenken theils mathematischer Natur betreffend die Ordnung der Kleinheit gewisser Größen, hauptsächlich aber darauf gegründet, daß Laplace die Dichte der Flüssigkeit als überall constant annimmt, während sie doch gerade an der Oberfläche, deren Verhältnisse doch maßgebend sind, rapid abnehmen, unmittelbar an der Wandfläche dagegen ebenso rapid zunehmen muß. Diese Änderungen der Dichte beachtet Poisson in seiner Theorie, nimmt eine andere Eintheilung der Flüssigkeit vor und gelangt zu einem Resultate, das sich von dem Laplace'schen nur durch die Form der bestimmten Integrale unterscheidet. Das Experiment kann sich weder für die eine noch für die andere Form entscheiden, da das Gesetz der molecularen Wechselwirkung unbekannt ist.

Aber noch von einem anderen Gesichtspuncte lassen sich, wie mir scheint, gegen die Laplace'sche Deduction des den Capillarerscheinungen zu Grunde liegenden Theorems Bedenken erheben, und zwar vom Standpuncte der Mechanik.

Um verständlicher zu werden, will ich als Einleitung einen analogen aber mehr concreten und evidenten Fall vorausschicken.

Wir denken uns drei schwerlose Platten, A, B, C, parallel an einander gestellt und die beiden äußeren mit der inneren durch Zugfedern z verbunden. Gleichzeitig sind zu beiden Seiten der Platte B zwei andere Federn d angebracht. Wenn nun A und C

Fig 2.

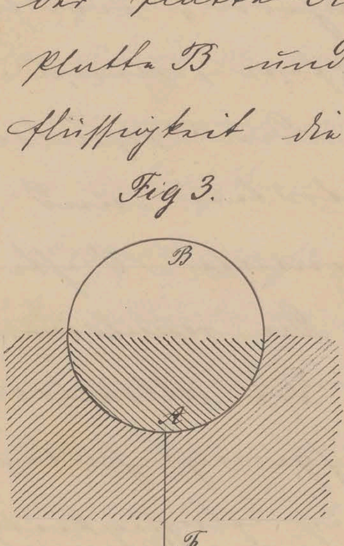


durch äussere Kräfte festgehalten werden, so nimmt B eine Lage ein, in welcher die von den Zugfedern z ausgeübten und an den feststehenden Platten A und C sich gleichsam anhaltenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Entfernt man nun die Platte A und mithin auch den nach oben wirkenden Zug, so wird das Gleichgewicht gestört und B hinuntergezogen. –

Wenn aber A ursprünglich nicht festgehalten wurde, so nähern sich die Platten aneinander, A an B und B an C und drücken die Federn d so weit zusammen, daß die Reaction dieser dem Zuge der Federn z gleichkommt. Wenn man jetzt die Platte A und mithin auch die Federn zwischen A und B entfernt, so hat dies auf die Platten B und C und ihre Wechselwirkung gar keinen Einfluss.

Einen im Grunde ganz analogen Fall bietet uns die von Laplace betrachtete Kugel und die angebliche Störung des Gleichgewichtes beim Entfernen derselben. Die Kugel AB ist analog der Platte A, der Flüssigkeitsfaden F vertritt die Platte B und die den Faden F umgebende Flüssigkeit die unterste Platte C. – Im Innern der Flüssigkeit, behauptet Laplace, befindet sich ein Flüssigkeitsfaden im Gleichgewichte, weil er von AB gleich stark aufwärts, wie von der übrigen Flüssigkeit abwärts gezogen wird. – Aber die Kugel AB hat keine fixe Lage, wird durch keine äussere Kraft festgehalten; sie schwebt nur (analog der Platte A) auf der übrigen

Fig 3.

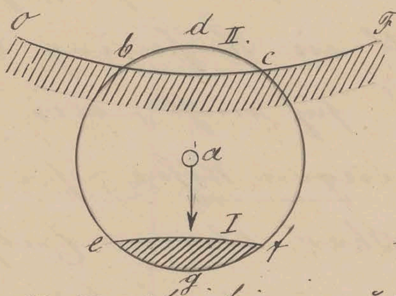


Flüssigkeit, ihre Lage ist eine Function der Lage aller Fäden f. Die Anziehung der Kugel auf die Fäden bewirkt also nur eine Näherung der Theilchen, die so weit fortschreitet, daß die wachsenden repulsiven Kräfte den attractiven gleich werden, d.h. die Flüssigkeit die ihr eigenthümliche Dichte annimmt. Niemals kann aber die Wechselwirkung zwischen der Kugel und den Flüssigkeitsfäden, auf welchen sie schwebt, den Einflüssen der tieferen Schichten das Gleichgewicht halten, noch die Entfernung der Kugel eine Störung des Gleichgewichtes, einen nach einwärts gerichteten Druck $K - \frac{H}{r}$ zur Folge haben. — Der Flüssigkeitsfaden im Innern der Flüssigkeit befindet sich im Gleichgewichte, weil sein Gewicht dem Auftriebe gleich ist, nicht weil die von allen Seiten angreifenden molecularen Anziehungen einander das Gleichgewicht halten. Die anziehenden Molecularkräfte stören sich in ihrer Wirkung durchaus nicht; die Molecule würden sich unter ihrem Einflusse einander fortwährend nähern, die Flüssigkeit würde zusammenschrumpfen, wenn nicht die mit der Dichte zunehmenden repulsiven Kräfte den attractiven entgegentreten und dieselben aufheben, sobald die normale Dichte sich eingestellt hat. Es sind also die repulsiven und attractiven Kräfte und nicht die attractiven untereinander, die sich das Gleichgewicht halten; für die Ruhe oder Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens ist es ganz gleichgiltig, ob es allseitig von Flüssigkeit umgeben ist, oder nicht. Für die Dichte ist dies allerdings nicht gleichgiltig; doch auf diese Betrachtungen werde ich erst später zurückkommen.

An dieser Stelle will ich nur betonen, daß ein von der obersten Schichte herrührender Druck im Sinne der Laplace'schen Theorie mir im unlösbaren Widerspruche zu stehen scheint mit dem Principe der Erhaltung des Schwerpunctes bei der Einwirkung bloss innerer Kräfte.

Möge a ein in der Nähe der Oberfläche OF befindliches Theilchen vorstellen, der um a gezogene

Fig. 4.



Kreis seine Wirkungssphäre, deren oberer Theil bcd über OF hinausragt. Da nun die Wirkungen aller in bcef gelegenen um a symmetrisch angeordneten Theilchen sich gegenseitig aufheben, so bleibt nur die von I ausgehende Wirkung und ist der daraus entstehende nach einwärts gerichtete Drang aller in der Nähe der Oberfläche gelegenen Theilchen ~~ist~~ offenbar identisch mit dem von Laplace abgeleiteten Drucke $K - \frac{H}{r}$.

Vorausgesetzt nun, die Entfernung der Flüssigkeit aus dem Abschnitte II weckte wirklich eine a nach abwärts ziehende Kraft p (was bereits oben bestritten wurde) so ist doch die Anziehung zwischen a und I für das ganze System (a und I zusammen) als innere Kraft im vollen Sinne des Wortes zu betrachten. Mit derselben Kraft, welche a nach abwärts zieht, wird I von a aufwärts gezogen, die Wirkung durch die Gegenwirkung aufgehoben. So entsteht in der Nähe der Oberfläche eine Flüssigkeitsschichte von der Dicke des Sphärendurchmessers, innerhalb welcher alle Molecularkräfte sich unter einander aufheben. Diese Schichte kann also auf die übrige Flüssigkeit unmöglich einen molecularen „Druck“ ausüben, der die Capillarerscheinungen hervorruft, Erscheinungen, bei denen

nicht nur der Schwerpunct der besagten Schichte sondern meistens auch der Schwerpunct der ganzen Flüssigkeitsmasse sich verschiebt.

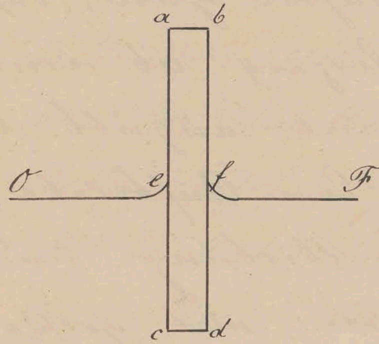
Dieser Einwurf wird auch dadurch nicht gehoben, daß Laplace in seinem zweiten Werke: „Supplément à la théorie de l'action capillaire" die Capillarerscheinungen „von einem neuen Gesichtspuncte" betrachtet, indem er die unmittelbare Anziehung der Rohrwand auf die Flüssigkeit als hinzutretende äussere Kraft in Rechnung bringt. Denn diese Anziehung erstreckt sich nicht, wie Jurin annahm, bis in die Mitte der engen Röhre; sie wirkt vielmehr nur auf unmeßbar kleine Entfernungen und könnte nur eine äußerst dünne Flüssigkeitsschichte in der unmittelbaren Nähe der Rohrwand anheben. Damit nun die ganze Flüssigkeit angehoben werde, bedarf es der Vermittlung eines von der freien Oberfläche herrührenden Druckes $K - \frac{H}{r}$ und hier collidirt man mit dem Principe der Erhaltung des Schwerpuncts. – Die flüssige Masse, aus welcher sich die Planeten formten, konnte einfach durch die gegenseitige Anziehung der Theilchen sich die Form einer Kugel geben; denn hier erstrecken sich die Kräfte auf alle Entfernungen, jedes Theilchen wirkt auf alle anderen und umgekehrt. Bei den Capillarerscheinungen aber setzen wir voraus – und diese Voraussetzung legt Laplace seiner Rechnung zu Grunde –, daß die Wechselwirkung nur zwischen äußerst nahe an einander gelegenen Theilchen besteht; und, weil es eben eine Wechselwirkung ist, theilt sie sich den weiteren Theilchen gar nicht mit.

Noch eine Frage drängt sich hier auf: Wenn

im Innern einer Flüssigkeit wirklich ein von der freien Oberfläche herrührender Druck K von ganz bedeutender Grösse stattfindet, müssten wir nicht in manchen Fällen diesen Druck direct wahrnehmen?

Wir denken uns einen prismatischen Körper abcd zum Theile in eine Flüssigkeit eingetaucht. Die hier auftretenden Druckverhältnisse werden

Fig 5.



von der Laplace'schen Theorie in folgender Weise beurtheilt:

Von der freien Oberfläche OF pflanzt sich ein Druck K in das Innere der Flüssigkeit fort bis auf die Trennungsfläche cd. Diese übt, da sie auch eben ist, einen ebenso grossen Druck K nach aufwärts und die beiden Drucke heben einander auf. Die an der Trennungsfläche cd sich ergebende Wechselwirkung zwischen den Theilchen des festen Körpers und den Flüssigkeitstheilchen gibt sich als Wechselwirkung nach außen gar nicht kund und kommt nicht in Betracht. So bleibt denn als die einzige auf cd wirkende Kraft der Auftrieb übrig und nur dieser läßt sich direct nachweisen.

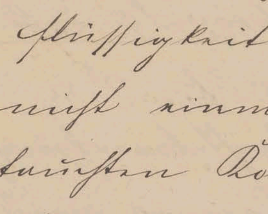
Aber diese Erklärung scheint mir nicht ganz einwurfsfrei zu sein.

Man denke sich, der Körper abcd bestehe aus einer Materie, deren Theilchen auf die Flüssigkeitstheilchen gerade so wirken, wie die Flüssigkeitstheilchen auf einander. Ob es einen solchen Körper gibt, ist ganz gleichgiltig. Jedenfalls kann man diesen Fall sehr angenähert herbeiführen, indem man das Prisma aus derselben

Flüssigkeit in erstarrtem Zustand herstellt. Jetzt kann die Fläche cd keinen Druck nach abwärts üben, da für die in der Nähe von cd befindlichen Flüssigkeitsmolecüle die Verhältnisse genau dieselben sind, als wäre von beiden Seiten der Grenzfläche Flüssigkeit vorhanden. Dann wird der von OF herrührende Druck K durch keinen Gegendruck aufgehoben, man müßte denn die ganz paradoxe Annahme thun, daß auch die Grenzfläche des festen Körpers ab einen nach aufwärts gerichteten Druck ausgibt. Auf diese Weise gelangt außer dem Auftriebe noch der Druck K auf cd zur Wirkung und das eingetauchte Prisma müßte mit großer Kraft (Laplace schätzt K auf 2-3 Atm) aus der Flüssigkeit herausgeschleudert werden, was aber nicht einmal annähernd geschieht. Die eingetauchten Körper befolgen alle das archimedische Princip bis auf ganz kleine Abweichungen, welche von der an ef sich hinaufziehenden Flüssigkeit herrühren.

Wollte man dagegen einwenden, daß die Theilchen eines festen Körpers vielleicht ganz anders auf die Flüssigkeitstheilchen wirken können, wie diese aufeinander, so läßt sich hier noch der folgende Einwand machen:

Fig 6.



Die Körper befolgen das archimedische Princip ganz unabhängig von der Gestalt ihrer unteren Grenzfläche. Denkt man sich die Fläche cd einmal convex, dann wieder concav abgeschliffen, so müßte der von der Trennungsfläche cd sich nach aufwärts fortpflanzende Druck

einmal größer, das andere Mal kleiner sein, als der von OF herrührende, so daß das eingetauchte Körper bald einen größeren bald einen kleineren Auftrieb erfahren müßte, als er nach dem archimedischen Principe erfahren sollte.

* *
*

Frei von diesen Widersprüchen und theoretischen Bedenken scheint mir eine ganz andere Erklärung für die Capillarerscheinungen, welche zu Anfang dieses Jahrhunderts von Thomas Young gegeben wurde. Ich fand bei Laplace und Poisson einige Andeutungen darüber vor, denen ich entnehme, daß Young die freie Flüssigkeitsoberfläche „mit einer gespannten Membrane vergleicht" ohne jedoch für die Spannung einen Grund anzugeben. Da ich aber die Schriften Young's nicht in die Hand bekommen konnte, so bin ich nicht im Stande zu sagen, inwiefern meine Ansichten sich denen Young's anschließen. Ich will versuchen, sie in möglichst kurze und deutliche Worte zu fassen:

Jede freie Flüssigkeitsoberfläche bildet ein gespanntes Häutchen, dessen Spannung S von der Natur der Flüssigkeit abhängt. Wenn die Oberfläche irgend wie gekrümmt ist, so übt sie in jedem Puncte in der Richtung der Normale einen gegen die concave Seite gerichteten Druck P, dessen Grösse ist:

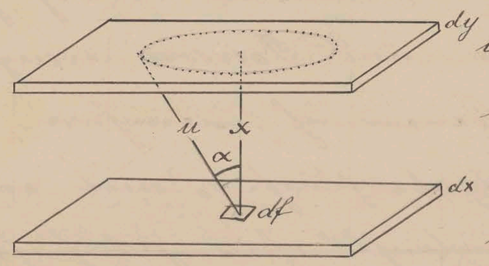
$$P = S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

wobei R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem betreffenden Puncte bedeuten. Auf diese Weise ist die freie Oberfläche

dasselbe im Raume, was die Kettenlinien in der Ebene, nämlich eine Art gespannten Häutchens (wie der Lederboden eines Gefäßbarometers), dessen Ränder an der Wand förmlich befestigt sind, und dessen von der Krümmung herrührende Hub- resp. Druckkraft P in jedem Puncte dem hydrostatischen Drucke das Gleichgewicht hält.

Das thatsächliche Vorhandensein einer Oberflächenspannung scheint mir eine notwendige Folge der molecularen Wechselwirkung zu sein.

Fig 7.



Denken wir uns zwei parallele Schichten der Flüssigkeit von der Dicke dx und dy in einer Entfernung x von einander. Die Kraft, mit welcher die beiden Schichten einander anziehen, lässt sich leicht ableiten aus der Kraft, mit welcher die einzelnen Theilchen auf einander wirken. Wir nennen die Anziehung zweier Volumeinheiten in der Entfernung u

$$p = \varphi(u),$$

wobei wir über die Natur von φ nichts weiter wissen, als dass $\varphi(u)$ für jeden merklichen Wert von u verschwindet. Aus diesem Gesetze berechnet man leicht die Anziehung a der beiden Schichten auf einander für jede Quadrateinheit

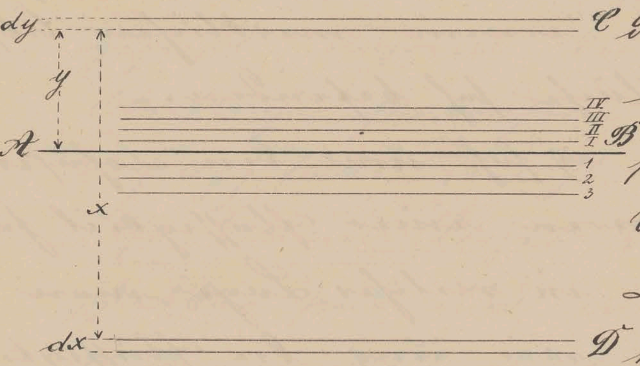
$$a = dx \cdot dy \cdot 2\pi x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right) \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

oder der Kürze halber

$$a = dx \cdot dy \cdot f(x)$$

Daraus läßt sich ohne Mühe der Cohäsionsdruck im Innern der Flüssigkeit berechnen, d.h. der Druck, welchen eine Ebene im Innern des Fluidums erleidet in Folge der Anziehung aller zu beiden Seiten liegenden Schichten.

Fig 8.



AB möge eine Ebene in der Flüssigkeit vorstellen und zu beiden Seiten derselben die Flüssigkeit ins Unendliche reichen. Der Cohäsionsdruck, welchen AB erleidet, ergibt sich als Summe der Anziehungen aller Schichten auf der einen Seite I, II, III, etc auf alle Schichten auf der anderen Seite 1, 2, 3.. etc.

Die Anziehung von C auf alle unter AB gelegenen Schichten ist

$$b = dy \int_y^\infty f(x)\,dx$$

Da nun jede über AB gelegene Schichte die ganze unter AB befindliche Flüssigkeitsmasse anzieht, so wird die Wirkung der ganzen diesseitigen auf die ganze jenseitige Masse durch das Integral ausgedrückt

$$c = \int_0^\infty dy \int_y^\infty f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ (1.$$

Diese Anziehung kann aber begreiflicher Weise keine Näherung der Theilchen zur Folge haben, da in AB mit zunehmender Dichte repulsive Kräfte erwachen, welche den Anziehungen gleich werden, sobald die normale Dichte sich eingestellt hat. Der Ausdruck c repräsentirt uns also die Größe der Cohäsion, die nicht von der Oberfläche

herrührt, sondern an jeder Stelle durch die moleculare Anziehung direct erzeugt wird. Es ist auch klar, daß ungeachtet der raschen Abnahme der Anziehung mit zunehmender Entfernung die Flüssigkeit sich nicht wörtlich ins Unendliche zu erstrecken braucht; die untersuchte Schichte AB muß nur in einem merklichen Abstande von der Oberfläche sich befinden.–

So lange es sich um den Cohäsionsdruck tief im Innern einer Flüssigkeit handelt, ist es gleichgiltig, in welcher Lage man die Schichten annimmt; da wir uns die Flüssigkeit nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt denken, so muß die Rechnung für eine horizontale, verticale oder schräge Schichtenlage immer denselben Druck $c = \int_0^\infty dy \int_y^\infty f(x)\,dx$ erhalten. Dies ist auch für das Gleichgewicht in einer Flüssigkeit unumgänglich notwendig.

Anders gestalten sich die Verhältnisse in einem Puncte, der von der Oberfläche um weniger als den Halbmesser der Wirkungssphäre absteht, so, daß bereits ein Theil der wirksamen oberen Schichten fehlt. Nennen wir die Entfernung des untersuchten Punctes von der Oberfläche z, so ist bei horizontaler Schichtenlagerung das Integral nicht zwischen 0 und ∞ sondern nur zwischen den Grenzen 0 und z zu nehmen

$$c' = \int_0^z dy \int_y^\infty f(x)\,dx.$$

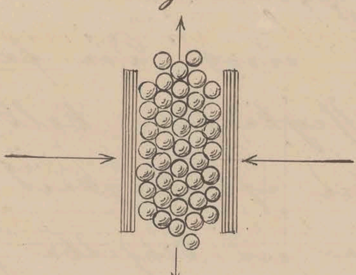
Fig. 9.



Wenn wir jetzt die Schichtenlage ändern, so bleibt der Ausdruck c' nicht constant, indem bei einer Drehung der Schichtenrichtung die obere Grenze des Integrals wächst ($= z_1$ wird) und endlich,

sobald die Schichtenrichtung vertical geworden ist, den Werth $= \infty$ annimmt. Der Druck in der Nähe der Oberfläche ist also nicht nach allen Richtungen derselbe; in der zur Oberfläche parallelen Richtung werden die Theilchen mit dem vollen Drucke $c=\int_0^\infty dy\int_y^\infty f(x)dx$ an einander gepreßt, während der Druck in der auf die Oberfläche senkrechten Richtung nur die Größe $c'=\int_0^z dy\int_y^\infty f(x)dx$ erreicht. Daß in einer Flüssigkeit, also einem Körper, dessen Theilchen absolut verschiebbar sind und in dem der Druck nach allen Richtungen sich gleichmäßig fortpflanzt, ein derartiger Zustand unmöglich ein Gleichgewichtszustand sein kann, ist leicht einzusehen. Denn gerade so, wie Kugeln zwischen zwei Platten gedrückt, nach

Fig. 10.



den beiden nicht gedrückten Seiten ausweichen, so werden auch die längs der Oberfläche stärker gedrückten Molecüle nach der Seite des schwächeren Druckes (d.h. in das Innere der Flüssigkeit) hinausgedrängt, während die drängenden Molecüle sich einander nähern. Auf diese Weise sucht jede nahe an der Oberfläche gelegene und zu derselben parallele Flüssigkeitsschicht von der Dicke dz in tangentialer Richtung sich zusammenzuziehen, gleichsam zusammenzuschrumpfen und zwar mit einer Kraft:

$$dS = dz(c-c') = dz\int_z^\infty dy\int_y^\infty f(x)dx$$

Diese Tendenz werden alle Schichten zeigen bis zu einer Tiefe, in der man ohne Fehler die Flüssigkeit nach allen Richtungen für unendlich aus-

gedacht ansehen kann. Alle in der Nähe der Oberfläche befindlichen Schichten zusammen werden durch ihre Tendenz, sich zusammenzuziehen, eine Spannung entwickeln, deren Größe ist:

$$S = \int_0^a dz \int_z^a dy \int_y^a f(x)\,dx \quad \ldots\ldots 2.)$$

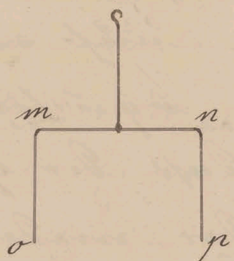
Diese Spannung ist es, welche nach meiner Ansicht den Capillarerscheinungen zu Grunde liegt. –

Die erste Frage, die sich hier aufdrängt, ist die, ob sich denn eine derartige Oberflächenspannung thatsächlich constatiren läßt; und diese Frage muss bejahend beantwortet werden. Man kann die Spannung der Oberfläche nicht nur nachweisen, sondern auch mit einem gewissen Grade von Genauigkeit messen. Das Mittel dazu bieten uns die feinen Häutchen, welche die Flüssigkeiten bilden.

Wenn man eine Flüssigkeit stark schüttelt oder durch eine Röhre in dieselbe hineinbläst, zeigen sich auf der Oberfläche Luftblasen, welche von einer dünnen Flüssigkeitsmembrane umhüllt sind. Bei sehr beweglichen Flüssigkeiten, Alkohol, Aether etc. bersten die Blasen schon nach kurzer Zeit, während bei anderen die Erscheinung sehr lange andauert. Ein geringer Seifenzusatz im Wasser gestattet aus der Lösung eine Blase von bedeutenden Dimensionen aufzublasen, welche einige Minuten andauert. Man bemerkt auch, daß die Luft in einer solchen Blase ein wenig comprimirt ist; denn verbindet man die eingeschlossene Luft mit der auswärtigen durch ein Röhrchen, so erfolgt alsbald

eine Contraction der Blase. Schon dieser Umstand deutet darauf hin, daß das dünne Flüssigkeitshäutchen gespannt ist und durch seine Spannung die Luft in der Blase comprimirt. Man könnte aber meinen, die Compression sei lediglich eine Folge der Krümmung der Blase, indem die äussere convexe Oberfläche einen Druck $K + \frac{H}{r}$ gegen das Innere der Blase, die innere concave Fläche einen Druck $K - \frac{H}{r}$ in entgegengesetzter Richtung ausübt, so daß ein einwärts gerichteter Druck $2\frac{H}{r}$ die Compression der Luft bewirkt. Gegen diese Annahme spricht aber der Umstand, daß die Blasenhülle, auch wenn sie nicht gekrümmt ist, sich zusammenzuziehen strebt.

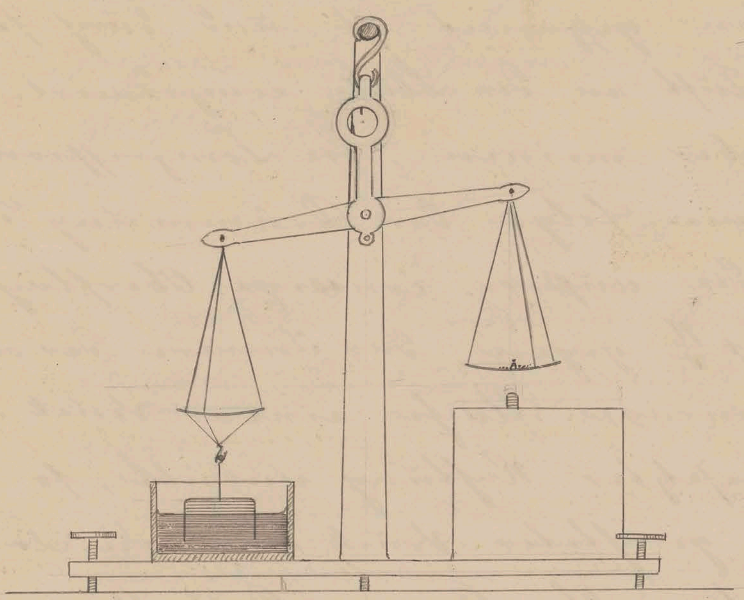
Fig. 11.

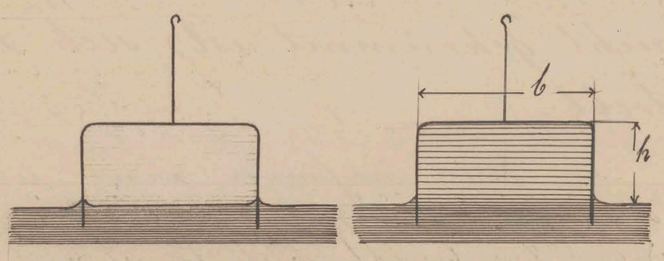


Wir nehmen eine aus feinem Eisendraht hergestellte Gabel von der in der Figur ersichtlichen Gestalt. Die beiden Gabeläste sind zu einander parallel und ihr Abstand ist b, eine bekannte Dimension. Wir tauchen die Gabel in verticaler Stellung so tief in eine Flüssigkeit ein, daß der Querdraht mn gerade untertaucht. Sodann ziehen wir die Gabel heraus, aber nur so weit, daß die Gabelspitzen o und p noch eingetaucht bleiben. Der Raum zwischen dem Querdrahte, der Flüssigkeitsoberfläche und den Gabelästen erscheint mit einem dünnen Häutchen überspannt, einem Häutchen von derselben Art, wie die oben erwähnten Blasenhüllen. Gleichzeitig wird die Gabel in die Flüssigkeit hineingezogen. Die Größe des Zuges

läßt sich leicht messen, wenn man die Gabel in ein Stückchen einhängt, welches an drei Coconfäden unter der Schale einer empfindlichen Waage befestigt ist. Unter derselben Schale ist ein kleines Gefäß aufgestellt, das mit der zu untersuchenden Flüssigkeit so weit gefüllt ist, daß bei einspielender Waage die Spitzen der Gabeläste eingetaucht sind. Hierauf wird die Waage äquilibrirt, das Gefäß so weit gehoben, daß der Querdraht eintaucht und dann wieder niedergestellt. Es zeigt sich zwischen den Gabelästen ein Häutchen und gleichzeitig neigt sich der Waagebalken stark nach der Seite der Gabel. Um wieder Gleichgewicht herbeizuführen, muß man auf der entgegengesetzten Seite Gewichte Q auflegen, welche den von dem Häutchen ausgeübten Zug repräsentiren. Da nun alle Messungen darin übereinstimmen, daß die Stärke des Zuges proportional ist der Breite b der Gabel, so stellt Q den Zug eines 1cm breiten Streifens von dem betreffenden Flüssigkeitshäutchen, also die specifische Spannung Σ desselben.

Fig. 12.

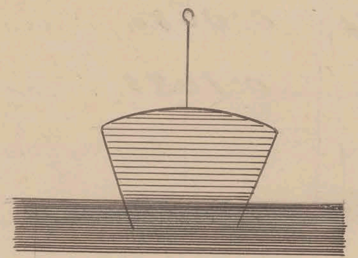




$$\Sigma = \frac{Q}{b}$$

Diese Spannung wirkt durchaus nicht einseitig in verticaler Richtung,

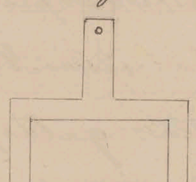
Fig. 13.



vielmehr sucht sich das Häutchen gleichzeitig in allen Richtungen zu contrahiren, wie man sich leicht an einer aus zu feinem Drahte hergestellten Gabel überzeugt, deren Äste durch die seitliche Spannung des Häutchens zusammengezogen und verbogen werden.

Ferner zeigen die Messungen, daß die specifische Spannung Σ des Häutchens einzig und allein von der Natur der Flüssigkeit und deren Temperatur abhängt, dagegen unabhängig ist von der Höhe h, bis zu welcher das Häutchen über die Oberfläche gezogen wurde und unabhängig von dem Materiale der Gabel. Ich wendete neben Gabeln aus Eisen- u. Kupferdraht auch Gabeln, die aus dünnen Glimmerplättchen herausgeschnitten

Fig. 14.



waren, die auch vor den Drahtgabeln den Vortheil haben, daß sie von ätzenden Flüssigkeiten nicht angegriffen werden und eine größere Genauigkeit gestatten. Aber alle Arten von Gabeln liefern dieselben Resultate.

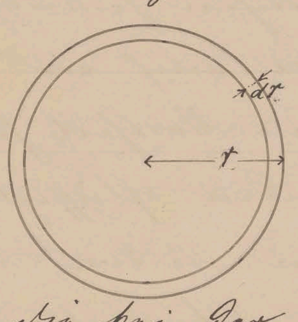
So fand ich als Mittelwerthe von drei bis vier sehr nahe übereinstimmender Messungen für die specifischen Spannungen der Häutchen verschiedener Flüssigkeiten die Werthe:

Temp.	Flüssigkeit	Σ in Gramm pro 1 cm
15°C	Abs. Alkohol	0·0480
"	Aceton	0·0510
"	Conc. Schwefelsäure	0·1125

Temp.	Flüssigkeit	Σ in Gramm pro 1 cm
15°C	Schwefeläther	0·0382
"	Schwefelkohlenstoff	0·0680
"	Wasser	0·1485
"	Benzin	0·0460
"	Petroleum	0·0544
"	Terpentinöl	0·0590

Nun ist es einleuchtend, daß die Flüssigkeits-membrane als Hülle einer Blase vermöge ihrer Spannung die eingeschlossene Luft comprimiren und ihr diejenige Gestalt geben muß, welche ein bestimmtes Volumen in der kleinsten Oberfläche einschließt (nämlich die Kugelform). Die Größe der Compression P läßt sich leicht berechnen nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen. Nennen wir den Radius der Blase r und

Fig 15.



lassen ihn um dr abnehmen, so ändert sich die Oberfläche um $8\pi . r . dr$, das Volumen um $4\pi r^2 dr$. Die von der Blasenhülle geleistete Arbeit

$$= \Sigma . 8\pi r dr$$

die bei der Verminderung des Luftvolumens verbrauchte Arbeit

$$= P . 4\pi r^2 dr \,.$$

durch Gleichsetzung erhalten wir:

$$P = \frac{2\Sigma}{r} \quad \ldots\ldots 3.)$$

Um mich zu überzeugen, ob diese Beziehung wirklich stattfindet, habe ich den Druck in Seifenblasen direct gemessen. Ich bediente mich zu diesem Zwecke der in der Figur abgebildeten Vorrichtung, deren Wesen darin besteht, daß die Com-

gression in der Blase gemessen wird durch den Anstieg einer leicht beweglichen Flüssigkeit (ich wandte Benzin an) in einer schrägen Röhre von geringer und genau bekannter Neigung. Diese wird dadurch hervorgebracht und gemessen, daß auf eine der beiden horizontalen Leisten L_1 und L_2, deren Ränder um eine bekannte Strecke entfernt sind, ein Dreikant D von gemessener Höhe aufgelegt wird. Den Durchmesser der Blase in Centimetern liest man (abgesehen von einer kleinen Correctur) direct an der verschiebbaren Scala S ab, welche so eingerichtet ist, daß, wenn die Spitze s das durchlöcherte kreisrunde Plättchen p berührt, der als Index functionierende Faden f gerade auf dem Nullpuncte steht. Bei geschlossenem Hahne H_2 wird auf p ein Tropfen Seifenlösung gebracht und durch Hineinblasen bei H_1 die Blase erzeugt. Nun schließt man den Hahn H_1 und öffnet H_2. Alsbald steigt das Benzin in R an und bleibt auf einem Theilstriche Δ_2 stehen. Dann stellt man die Spitze s auf den Blasenscheitel ein, liest an der Scala S den Blasendurchmesser ab und bläst endlich die Blase weg, wobei das Benzin in R auf einen tieferen Theilstrich Δ_1 sich zurückzieht. Der Druck in der Blase betrug also, wenn σ das specifische Gewicht des Benzins bedeutet:

$$P = (\Delta_2 - \Delta_1)\,\sigma \sin\alpha$$

der theoretisch aus der Spannung der Blasenhülle berechnete Druck

$$P' = \frac{4\Sigma}{D}$$

Nun war:

$\sigma = 0{\cdot}728$

$\Sigma = 0{\cdot}0545$ Gramm pro 1 cm

$\sin\alpha = 0{\cdot}0570$

Die Genauigkeit fordert zwei Correcturen: die eine betrifft das Sinken des Spiegels in T_2 beim Aufsteigen in R, die andere den wahren Durchmesser D_{corr} der Blase, welcher von dem abgelesenen ein wenig abweicht, weil die Blase die Ebene des Plättchens nicht tangirt sondern in einem Kreise schneidet.

Die für die Correcturen nöthigen Daten waren (wenn ϱ_1 den Radius der Röhre R, ϱ_2 den Radius des Fläschchens T_2 und ϱ_3 den Radius des Plättchens p bedeutet)

$$\varrho_1 = 0{\cdot}0727^{cm}$$

$$\varrho_2 = 0{\cdot}920^{cm}$$

$$\varrho_3 = 0{\cdot}4^{cm}$$

Nach diesen Daten war der beobachtete Druck in der Blase

$$P = 0{\cdot}0461\,(\Delta_2 - \Delta_1)$$

und der aus der Hüllenspannung berechnete

$$P' = 0{\cdot}218\,\frac{1}{D_{corr}}$$

In der folgenden Tabelle ist nun ein Theil der Messungen zusammengestellt, die ich mit der oben beschriebenen Vorrichtung vornahm.

Δ_2	Δ_1	$\Delta_2 - \Delta_1$	D_{corr}	P (beobachteter Druck)	P' (berechneter Druck)
9·36	4·00	5·36	0·89	0·247	0·245
8·35	4·15	4·20	1·15	0·190	0·190
8·10	4·54	3·56	1·33	0·165	0·164
7·65	4·55	3·10	1·56	0·143	0·140
7·40	4·55	2·85	1·70	0·132	0·128
7·25	4·60	2·65	1·84	0·122	0·119
7·15	4·75	2·40	2·01	0·111	0·108
7·04	4·66	2·38	2·08	0·110	0·105
7·70	5·63	2·07	2·27	0·096	0·096

Δ_2	Δ_1	$\Delta_2 - \Delta_1$	D_{corr}	P (der beobachtete Druck)	P' (der berechnete Druck)
6·10	4·15	1·95	2·47	0·090	0·088
5·65	3·85	1·80	2·61	0·083	0·083
7·34	5·60	1·74	2·71	0·081	0·080
5·80	4·55	1·25	3·84	0·058	0·057
5·50	4·48	1·02	4·68	0·047	0·046
5·25	4·33	0·92	5·13	0·0425	0·042
5·75	4·80	0·95	5·08	0·044	0·043

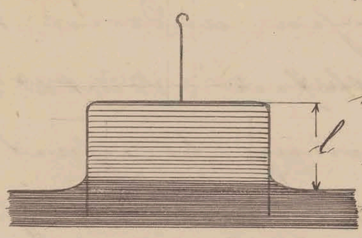
Die Übereinstimmung, welche bei den hier angeführten und zahlreichen anderen Messungen zwischen dem beobachteten Drucke P und dem aus der Hüllenspannung berechneten P' sich ausnahmslos zeigte, scheint mir ein hinreichender Beleg dafür zu sein, daß die Luft in der Blase einzig und allein durch den Einfluß der gespannten Hülle zusammengedrückt wird.

Ich habe mich bei diesen Erscheinungen etwas länger aufgehalten, weil sie mit den Capillarerscheinungen innig zusammenhängen, indem der Druck in der Blase durch dieselbe Kraft hervorgerufen wird, die auch das Ansteigen der Flüssigkeit in Capillarröhrchen bewirkt. Denn die Spannung S des Flüssigkeitshäutchens hat ihren Grund in der Spannung S der beiden freien Flüssigkeitsoberflächen, welche das Häutchen begrenzen.

Ich wüßte auch keinen anderen probablen Grund für die Spannung der flüssigen Membrane anzugeben. Wohl am nächsten liegt der Gedanke, dieselbe rühre her von einer gewissen elastischen Zähigkeit, welche den Flüssigkeiten anhaftet und gegen eine Deformation

rangirt. Diese Erklärung ist aber nicht stichhältig, denn einerseits entwickeln auch die beweglichsten Flüssigkeiten, bei denen keine Spur von Zähflüssigkeit sich beobachten läßt, ausnahmslos ganz bedeutende Spannungen in ihren Häutchen, andererseits kann von Elasticitätswirkungen unmöglich dort die Rede sein, wo die Kraft von der Deformation unabhängig ist. Denn der Zug, welcher auf die

Fig 17.



Gabel sich überträgt und den Ausschlag der Waage bewirkt, ist, wie bereits erwähnt, unabhängig von der Länge l, zu welcher das Häutchen gedehnt wurde, und, sobald die Waage äquilibrirt ist, kann man das Gefäß langsam heben und senken, also das Häutchen dehnen und verkürzen, ohne daß der Zug an der Gabel sich ändert. – Wenn man eine große Seifenblase aufbläst und die Luftspannung mißt, sodann durch Öffnung des Hahnes H, (Fig 16) einen Theil der Luft ausströmen läßt, so wächst mit Abnahme des Blasendurchmessers die Luftspannung genau nach Maßgabe der Formel $P = \frac{2\Sigma}{R}$, während doch die Hüllenspannung, wenn sie wirklich eine Folge von Zähigkeit oder Elasticität wäre, beim Zusammenschrumpfen der Blase abnehmen, die beobachtete Luftspannung also von der Formel immer mehr abweichen müßte.

Noch weniger haltbar wäre es, den Zug an der Gabel der saugenden Wirkung der in dem Häutchen angehobenen Wassersäule

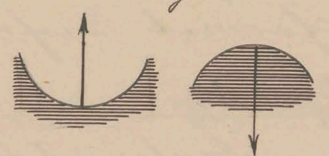
zuzuschreiben. Es bleibt die einzige Annahme übrig, dass die Spannung des Häutchens sich zusammensetze aus den Spannungen der beiden Seitenflächen desselben, deren Notwendigkeit bereits oben theoretisch dargethan wurde. Die Spannung Σ des Häutchens gibt uns also die doppelte Oberflächenspannung S, und auf diese Weise kann man für die verschiedenen Flüssigkeiten S bestimmen.

$$S = \tfrac{1}{2}\Sigma \quad \ldots\ldots \quad (4.$$

Nun gehe ich auf die eigentlichen Capillarerscheinungen über.

Ist die Flüssigkeitsoberfläche eben, so hat ihre Spannung auf die übrige Flüssigkeit selbstverständlich gar keinen Einfluß, so, wie eine gerade gespannte Schnur normal zu ihrer Richtung keine Kraft äußert. Ist aber die Oberfläche gekrümmt,

Fig 18.



so muß sie, wie leicht einzusehen, gegen das Innere der Krümmung eine Kraft üben, deren Größe leicht in ähnlicher Weise gerechnet werden kann, wie die Luftspannung in der Seifenblase. Nehmen wir zunächst an, die Oberfläche sei nach einem Kreiscylinder gekrümmt; der Radius ist R, die Länge der Erzeugenden =1. Wird nun der Radius des Cylinders um dR kleiner, so ändert sich seine Mantelfläche um $2\pi\, dR$, sein Volumen um $2\pi R\, dR$. Wenn nun der Druck im Inneren des Cylinders dem Zusammenschrumpfen der gespannten Mantelfläche Gleichgewicht halten soll, so muß

$$2\pi R\, dR \cdot P = 2\pi\, dR\, S$$

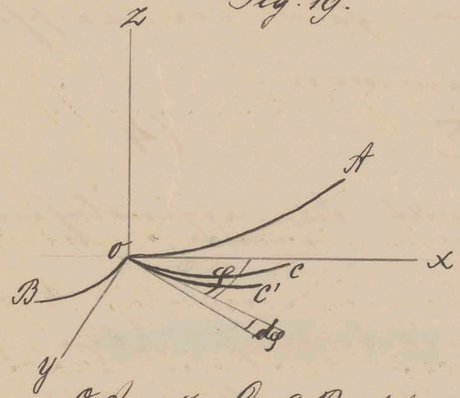
$$P = \frac{S}{R} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

In ganz ähnlicher Weise findet man den Druck in einer gespannten Kugeloberfläche:

$$P = \frac{2S}{R} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Endlich läßt sich auch die Kraft berechnen, die eine Oberfläche von beliebiger Krümmung in jedem Puncte auf die Flüssigkeit ausübt.

Fig. 19.

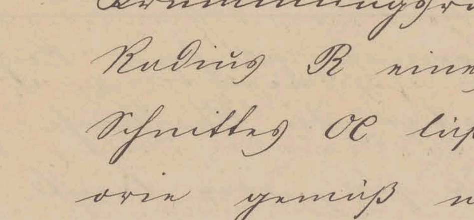


Wir nehmen ein Coordinatensystem so an, daß die XY-Ebene im Ursprunge O die Fläche tangirt und die beiden anderen Coordinatenebenen dieselbe in den Hauptkrümmungen OA und OB schneiden. Der Hauptschnitt OA hat den Krümmungsradius R_1, OB den Radius R_2. Der Radius R eines unter dem Winkel φ geführten Schnittes OC läßt sich der allgemeinen Flächentheorie gemäß nach der Formel rechnen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi$$

Durch unendlich viele radiale Schnitte zerfällt die Fläche um den Punct O in unendlich viele convergirende Streifen COC' etc, deren Krümmung von Schnitt zu Schnitt variirt, aber innerhalb eines Streifens als constant angesehen werden kann. So haben wir es nunmehr mit lauter Kugelstreifen zu thun. Der Druck, welchen ein

Fig. 20.



doppeltes Kugelzweieck CC'DD', dessen Scheitelwinkel dφ ist, vermöge seiner Spannung gegen den Kugelmittelpunct übt, ist nur der $\frac{\pi}{d\varphi}$te Theil des Druckes einer vollen Kugelfläche von demselben Radius und derselben Span-

nung also

$$dP = \frac{d\varphi}{\pi} \cdot \frac{2S}{R}$$

oder nach Einsetzung des Werthes von $\frac{1}{R}$:

$$dP = \frac{2S}{\pi R_1} \cos^2\varphi \, d\varphi + \frac{2S}{\pi R_2} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

der Druck der ganzen Fläche im Puncte O:

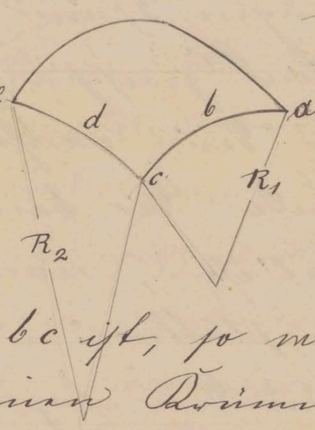
$$P = \frac{2S}{\pi R_1} \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi + \frac{2S}{\pi R_2} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi .$$

Nach Durchführung der Integration:

$$P = S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ldots\ldots\ldots 7.)$$

Kürzer, wenn auch vielleicht minder strict ist ein anderer Beweis nämlich der folgende.

Fig. 21.



Es soll acef ein aus der Fläche herausgeschnittenes elementares Rechteck vorstellen, dessen Seiten zu den Hauptschnitten parallel sind. Wäre cde gerade und Erzeugende eines Cylinders, dessen Leitlinie abc ist, so würde der Cylinder vermöge dieser einen Krümmung nach einwärts einen Druck üben $= \frac{S}{R_1}$; wäre umgekehrt nur cde gekrümmt, abc dagegen gerade, so würde der Cylinder vermöge dieser einzigen Krümmung einen Druck $= \frac{S}{R_2}$ üben. Da nun die Fläche nach beiden Richtungen gleichzeitig gekrümmt ist, so addiren sich die beiden Wirkungen und der Gesammt-Druck ist:

$$P = S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Erlaubt nun die allgemeine Flächentheorie, daß die Summe der beiden Hauptkrümmungen gleich ist der Summe der Krümmungen zweier beliebiger auf einander senkrechten Schnitte;

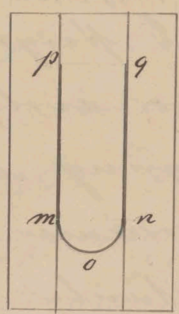
wir brauchen also die Seiten des Rechteckes nicht zu den Hauptschnitten parallel anzunehmen und gelangen immer zu demselben Resultate.

Damit sind die Mittel geboten, die Gestalt der freien Oberfläche in jedem besonderen Falle zu beurtheilen, wenn man nämlich beachtet, daß, falls Gleichgewicht herrschen soll, der Druck der gespannten Oberfläche $S\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ in jedem Puncte dem hydrostatischen Drucke gleich sein muß. Dabei haben wir es bei convexer Oberflächengestalt mit einem positiven Drucke, bei concaver mit einer saugenden Wirkung der gehobenen Wassersäule zu thun. Man sieht auch aus den Gleichungen 5.) und 6.), warum in Capillarröhrchen und zwischen zwei parallelen Platten die Hebung dem Durchmesser des Röhrchens (resp. dem Abstande der beiden Platten) umgekehrt proportional ist, warum ferner die Hebung zwischen den Platten nur halb so groß ist, als in einem runden Capillarröhrchen, dessen Durchmesser gleich ist dem Abstande der beiden Platten. –

Dabei ist die gespannte Oberfläche mit ihren Rändern an der Wand des festen Körpers befestigt und zwar längs jener Linie, welche die Grenze der Netzung bildet. Wenn man in einem Rohre die Flüssigkeit ansaugt und dann wieder sinken läßt, so erscheint, wie auch Laplace bemerkt, im Falle einer vollständigen Adhäsion die Wand der Röhre mit einer gleichmäßigen dünnen Flüssigkeitsschichte überzogen; diese geht an ihrem

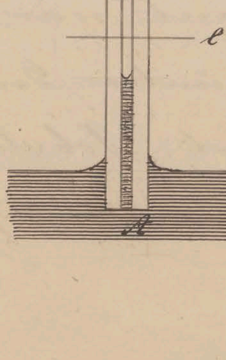
unteren Ende stetig in die Flüssigkeitsober-

Fig. 22.



fläche über, so daß man in m und n die Randfläche tangirt. Die netzende Flüssigkeitsschichte bildet auf einer Seite eine freie Oberfläche dar, welche nach dem Vorhergesagten eine Spannung S pro 1cm entwickeln muß. Diese Spannung hält gleichsam die Ränder mn des gespannten Teilchens mno, dessen Krümmung in jedem Puncte der saugenden Wirkung der gehobenen Flüssigkeitssäule das Gleichgewicht hält. Oben wird die netzende Flüssigkeitsschichte in ihren Endelementen pq direct durch die Anziehung der Theilchen des festen Körpers auf die Flüssigkeitstheilchen festgehalten. Daß die Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Körper ihren Sitz wirklich erst bei pq hat, kann man sich durch ein Experiment überzeugen. Man befestigt ein enges Glasröhrchen AB mit oben abgerundeten Kanten so, daß es unten

Fig. 23.

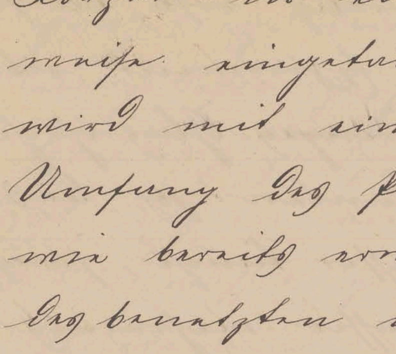


in Wasser taucht, saugt sodann das Wasser mehrmals bis B an, damit das Röhrchen bis zum oberen Ende gehörig benetzt sei, und bezeichnet den Stand des Wassers e. Hierauf bringt man einen kleinen Tropfen von gefärbter Flüssigkeit mit geringer specifischer Oberflächenspannung, etwa gefärbten Alkohol, auf das obere Ende B, jedoch mit Vorsicht, damit die Öffnung oben nicht überdeckt

werde. Sofort wird die schwach gespannte Alkoholschichte von der stärker gespannten Wasserschichte hinuntergezogen und steigt immer tiefer hinunter. Gleichzeitig aber verliert die Wasserschichte ihre obere Befestigung und die im Röhrchen angehobene Wassersäule sinkt. Bei meinen Versuchen fiel die Säule um mehr als 1^{cm}, obwohl, wie ich an der Färbung erkannte, die Alkoholschichte noch um 5-6^{cm} von der Oberfläche des Wassers im Kapillarröhrchen entfernt war. Damit erscheint die Vermittlung des gespannten flüssigen Wandüberzuges hinlänglich nachgewiesen.–

Die hier auseinandergesetzte Anschauungsweise erklärt unmittelbar zwei Thatsachen. Die erste besteht darin, daß ein prismatischer Körper in eine adhärirende Flüssigkeit theilweise eingetaucht, von derselben hinuntergezogen wird mit einer Kraft $= SU$, wobei U den Umfang des Prismas bedeutet. Diese Kraft, die, wie bereits erwähnt, an der Trennungslinie des benetzten und trockenen Wandtheiles angreift, wirkt dem Auftriebe entgegen und ist bei

Fig. 24.



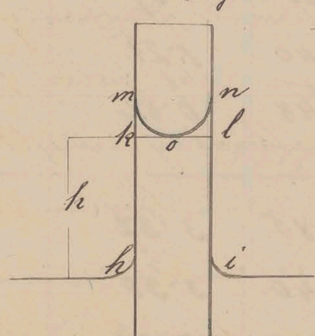
areometrischen Messungen wol zu berücksichtigen. Ich habe sie an sehr dünnen rechteckigen Glimmerblättchen gemessen, deren Breite b genau bekannt war. Das Plättchen wurde anstatt der Kugel unter der Wagschale aufgehängt und äquilibrirt. Sobald nun die untere Kante rs mit der Flüssigkeitsoberfläche

in Berührung kam, wurde das Plättchen hineingezogen und ich fand durch abermalige Aequilibration jedesmal $Q = b\Sigma = 2bS$, was ungeachtet der außerordentlich geringen Dicke mit SU identisch ist. Solcher Plättchen kann man sich also anstatt der Gabeln bedienen, um die specifische Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten zu bestimmen. –

Das zweite Theorem bezieht sich auf das Ansteigen der Flüssigkeit in prismatischen Röhrchen von beliebigem Querschnitte und wird von Laplace in die Worte gefaßt: Le volume de fluide, élevé au dessus du niveau par l'action capillaire, est proportionnel au contour de la section de la surface intérieure du tube. Dieser Satz bedarf nunmehr keines Beweises und kann nur noch schärfer präcisirt werden: Das Gewicht der angehobenen Flüssigkeit ist gleich dem inneren Umfange der Röhre multiplicirt mit der specifischen Oberflächenspannung.

Wir wenden diesen Satz auf kreiscylindrische Röhrchen an. Der innere Umfang des Röhrchens ist $2R\pi$, folglich das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit $G = 2R\pi \cdot S$. Dieses setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Säule $hikl = R^2\pi h s$ (s bedeutet das specifische Gewicht), und dem Gewichte des Meniscus $klmn$, welches mit Rücksicht auf die nahezu halbkugelförmige Gestalt der Fläche mon gleich ist: $\frac{1}{3} R^2\pi s$.

Fig. 25.



Es ist also

$$2R\pi S = R^2\pi s\left(h + \frac{R}{3}\right)$$

und daraus

$$h = \frac{2S}{Rs} - \frac{R}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Behufs Prüfung des Zusammenhanges der Oberflächenspannung mit den Capillarerscheinungen habe ich mit vielen Flüssigkeiten diesbezügliche Versuche angestellt und fasse ihr Resultat in einer Tabelle zusammen.

Flüssigkeit	s	$S = \frac{\Sigma}{2}$	R	h (beobacht.)	h (berechnet)
Abs. Alkohol	0·800	0·024	0·0386 0·0440 0·0648	1·51 1·31 0·89	1·54 1·34 0·91
Aceton	0·815	0·025$_5$	0·0386 0·0440 0·0648	1·59 1·40 0·95	1·61 1·40 0·95
Conc. Schwefelsäure	1·84	0·056	0·0386 0·0440 0·0648	1·65 1·32 0·92	1·56 1·36 0·92
Schwefeläther	0·725	0·019$_1$	0·0386 0·0440 0·0648	1·32 1·15 0·78	1·35 1·18 0·79
Schwefelkohlenstoff	1·269	0·034	0·0386 0·0440 0·0648	1·37 1·21 0·82	1·34 1·19 0·82
Wasser	1·00	0·074	0·0386 0·0440 0·0648	3·87 3·36 2·27	3·82 3·34 2·27
Benzin	0·727	0·023	0·0388 0·0447 0·0547	1·56 1·40 1·14	1·61 1·41 1·14

Flüssigkeit	s.	$S = \frac{\Sigma}{2}$	R	h (beobachtet)	h (berechnet)
Petroleum	0·801	0·0272	0·0388 0·0447 0·0547	1·71 1·46 1·22	1·73 1·49 1·22
Terpentinöl	0·866	0·0295	0·0388 0·0447 0·0547	1·71 1·46 1·20	1·74 1·50 1·23

Die quantitative Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der berechneten Höhe ist so auffallend und kehrt so consequent bei den verschiedenartigsten Flüssigkeiten wieder, dass sie schwerlich als zufällig bezeichnet werden darf; vielmehr bildet sie einen wichtigen Beleg für die Abhängigkeit der Capillarerscheinungen von der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten. Die Abweichungen, die hier auftraten, sind unbedeutend genug, um durch Beobachtungsfehler erklärt zu werden. Diese können sich leicht einschleichen bei der Messung der Erhebungen wegen mangelhafter Netzung oder einer Parallaxe, hauptsächlich aber bei der Messung der Häutchenspannung Σ: hier muss der Auftrieb berücksichtigt werden; man muss sich hüten, durch ein allzurasches Senken des Gefässes einen Riss auf die Wagschale auszuüben, wodurch die Messung ungenau wird; man darf – besonders bei Wasser und wässerigen Lösungen – die Flüssigkeit im Gefässe nicht zu lange stehen lassen, da sie sonst (wie ich glaube durch Absorption von Gasen) ihre Beschaffenheit an der Oberfläche ein wenig ändert. Diese Fehlerquelle lässt sich dadurch zum

großen Theile beseitigen, daß man von Zeit zu Zeit die Flüssigkeit schüttelt oder stark herumrührt.

Die Lösungen und Mischungen ändern ebenfalls an ihrer Oberfläche durch Verdunsten das Lösungs- oder Mischungsverhältniß; dies halte ich auch für den Grund, warum die Abweichungen bei diesen Flüssigkeiten etwas größer sind, als bei den reinen und einfachen.

Flüssigkeit	s	$S = \frac{\Sigma}{2}$	R	h (beobachtet)	h (berechnet)
Mischung von Alkohol und Wasser (40%)	0·937	0·032	0·0386	1·75	1·76
			0·0440	1·49	1·54
			0·0648	1·00	1·04
Aetzkalilösung.	1·013	0·069	0·0386	3·65	3·51
			0·0440	3·26	3·09
			0·0648	2·15	2·09
Conc. Kupfervitriol-lösung	1·162	0·070	0·0386	3·21	3·09
			0·0440	2·90	2·70
			0·0648	1·95	1·82
Verd. Schwefelsäure (40%)	1·296	0·053₅	0·0386	2·20	2·14
			0·0440	1·79	1·86
			0·0648	1·21	1·26
Zuckerlösung (15%)	1·037	0·069	0·0386	3·45	3·44
			0·0440	3·06	3·02
			0·0648	2·05	2·04

Um durch Rechnung die Gestalt der Oberfläche in jedem einzelnen Falle zu bestimmen, muß man von der Gleichung 7.) ausgehen und beachten, daß für den Fall des Gleichgewichtes die Hubkraft P der gekrümmten Oberfläche in jedem Punkte dem hydraulischen Drucke gleich sein muß. Bezeichnet z die Höhe eines Oberflächenpunktes über dem horizontalen Niveau und s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so gilt die Gleichung:

$$S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = z.s$$

Drückt man nun die zwei Krümmungsradien R_1 und R_2 nach den Gesetzen der allgemeinen Flächentheorie durch partielle Differentialquotienten aus, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration über die Gestalt der Fläche in einzelnen Fällen Aufschluß gibt.

Ich will mich darauf beschränken, einen leicht integrablen Fall näher zu betrachten. Wenn man eine ebene Platte in eine gut adhärierende Flüssigkeit unter beliebigem Winkel eintaucht, so zieht sich diese an der Wandfläche in Form eines Cylinders hinauf, dessen Erzeugende zur Platte parallel ist, dessen Leitlinie die Wandfläche tangirt. Um die Form der Leitlinie zu bestimmen, nehmen wir die

Fig. 26.

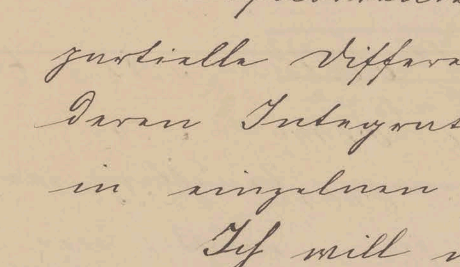
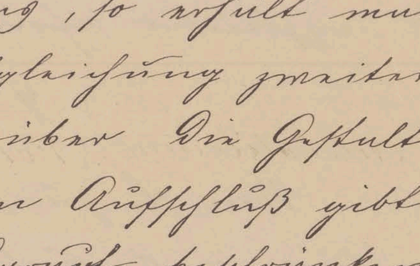


Fig. 27.



Richtung des horizontalen Niveaus zur X-Axe an,

die Y-Axe darauf senkrecht, jedoch vorläufig der Lage nach unbestimmt. Da $\frac{1}{R_2}=0$ ist, so haben wir die Gleichung: $\frac{S}{R_1} = y \cdot s$, oder

$$\frac{1}{R_1} = y \cdot k,$$

wobei der Kürze halber $\frac{s}{S} = k.(\alpha)$ gesetzt wurde.

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = yk$$

Nun ist $y'' = \frac{y'dy'}{dy}$, folglich

$$\frac{y'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k\,y\,dy$$

und durch Integration:

$$\frac{2}{\sqrt{1+y'^2}} + ky^2 = C_1$$

Wir bestimmen aus dieser Gleichung y' in expliciter Form:

$$y' = \frac{\sqrt{4-(C_1-ky^2)^2}}{C_1-ky^2} \quad \ldots\ldots (b.$$

Um C_1 zu bestimmen, beachten wir, daß für $y=0$ auch $y'=0$ sein muß; wir finden

$$C_1 = 2$$

und die Gleichung b.) lautet nunmehr:

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{k}\,\frac{\sqrt{4-ky^2}}{2-ky^2}$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2-ky^2}{y\sqrt{4-ky^2}}\,dy \quad \text{und}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{k}}\int\frac{dy}{y\sqrt{4-ky^2}} - \sqrt{k}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{4-ky^2}} + C_2 \;\ldots\; c.)$$

Um das erste Integral zu finden setzen wir

$\sqrt{4-ky^2} = z$ und erhalten

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{4-ky^2}} = -\int\frac{dz}{4-z^2} = \frac{1}{4}\log nat\frac{2-z}{2+z} = \frac{1}{4}\log nat\frac{2-\sqrt{4-ky^2}}{2+\sqrt{4-ky^2}}$$

das zweite Integral:

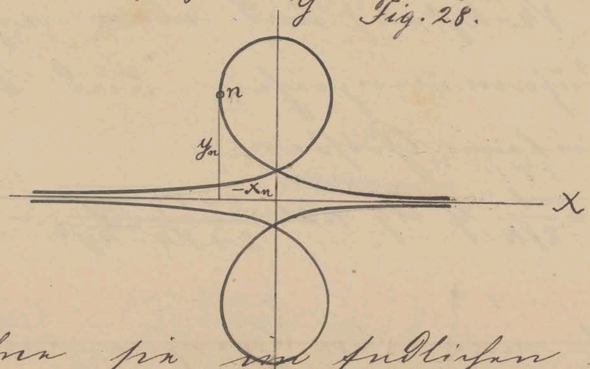
$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{4-ky^2}} = -\frac{1}{k}\sqrt{4-ky^2}$$

durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung c.) erhalten wir die Gleichung der fraglichen Leitlinie und müssen gleichzeitig die Lage der Y-Axe so, daß die Integrationsconstante = 0 wird.

$$x = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log nat \frac{2-\sqrt{4-ky^2}}{2+\sqrt{4-ky^2}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4-ky^2} \;\ldots\ldots\; 9.)$$

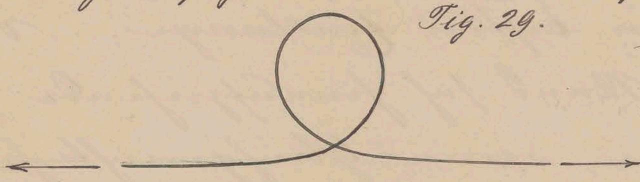
Man ersieht aus der Gleichung 9.), daß die Curve ~~gegen die Axen~~ symmetrisch gegen die Axen angeordnet ist, zwei Schleifen bildet und sich der X-Axe von vier Seiten her äußerst rasch nähert,

Fig. 28.



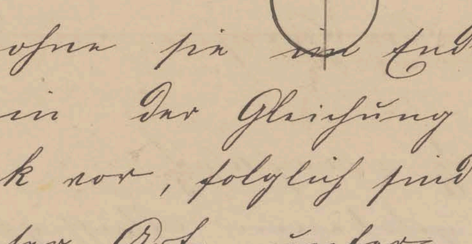
ohne sie im Endlichen zu erreichen. Es kommt in der Gleichung nur ein einziger Parameter k vor, folglich sind alle möglichen Linien dieser Art unter einander ähnlich. Es ist, wie leicht einzusehen, dieselbe elastische Linie, nach welcher sich eine dünne, sehr lange Feder biegt, wenn man sie zu einer Schleife umschlingt und ihre Enden auseinanderzieht.

Fig. 29.



Ist die Wand des eingetauchten Körpers vertical, so wird sie von der Cylinderfläche in der Erzeugenden n tangirt, wobei die Coordinaten des Punktes

Fig. 30.



$$n \begin{cases} -x_n = \frac{1}{2\sqrt{k}} \log nat \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2}{k}} \\ y_n = \sqrt{\frac{2}{k}} \end{cases}$$

sich leicht finden lassen, wenn man in der Gleichung b.) $y' = \infty$ setzt. Für diesen

Jetzt kann man auch leicht das Volumen V der über das Niveau gehobenen Flüssigkeit berechnen. Nehmen wir die Länge der Erzeugenden = 1 cm, so ist $V = F = \int_0^{y_n} (x - x_n)\, dy = \int_0^{y_n} x\, dy - x_n y_n$

$$\int x\, dy = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \log\left(2 - \sqrt{4 - ky^2}\right) dy - \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \log\left(2 + \sqrt{4 - ky^2}\right) dy - \frac{1}{\sqrt{k}} \int \sqrt{4 - ky^2}\, dy + C$$

Alle drei hier vorkommenden Integrationen lassen sich durchführen (die beiden ersten durch Transformation: $\sqrt{4 - ky^2} = z$) und man erhält durch Einsetzen, Zusammenziehen und Vereinigen aller constanten Größen:

$$\int x\, dy = \frac{1}{2\sqrt{k}}\, y \log nat \frac{2 - \sqrt{4 - ky^2}}{2 + \sqrt{4 - ky^2}} - \frac{1}{2\sqrt{k}}\, y \sqrt{4 - ky^2} + C$$

Endlich setzt man die Grenzen ein, subtrahirt $x_n y_n$ und erhält:

$$F = V = \frac{1}{k} = (\text{nach } a.)\ \frac{S}{s}$$

das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit:

$$G = S \quad \ldots\ldots \quad 10.)$$

Dieses Resultat steht mit dem Vorhergehenden im besten Einklange. Die an der benetzten Wand sich hinaufziehende Flüssigkeitsschichte kann, wenn Gleichgewicht herrschen soll, nicht mehr und nicht weniger Flüssigkeit über das Niveau heben, als ihre specifische Spannung gestattet. An ihrem oberen Ende ist die gespannte Schichte längs der Grenze der Netzung an der Wand der Platte befestigt und zieht jeden Centimeter ihrer Breite mit einer Kraft S hinunter. So überträgt sich durch Vermittlung der netzenden Schichte die Last der gehobenen Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper. —
